

9.º Ano - Matemática
Exame Nacional (23) – 22 Junho 2011

Soluções:

1. $p = \frac{5}{13}$. **Nota:** Há 5 bolas pares com número superior a 3, duas com o número 4 e três com o número 6 (casos favoráveis) nas 13 bolas do saco (casos possíveis).

2. 12 rapazes. **Nota:** $p(\text{rapaz}) = \frac{2}{3}$, logo $p(\text{rapariga}) = \frac{1}{3}$, ou seja, há 18 alunos na turma porque

$p(\text{rapariga}) = \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$. Deste modo há $18 - 6 = 12$ rapazes na turma.

3. $\bar{x} = \frac{4 \times 1,25 + 1,23}{5} = 1,246$ m. A média das alturas dos cinco irmãos é 1,246 metros.

4. $S = \{-2, -1, 0\}$

5. $a^4 \times a^2$

6. 45 fósforos. **Nota:** Como o número tem de ser múltiplo de 3, múltiplo de 5 e menor do que 50, as hipóteses ficam reduzidas ao 15, ao 30 e ao 45. A outra condição é poder ser escrito como um múltiplo de 4 mais 1, logo o número só pode ser o 45 porque $45 = 44 + 1 = 4 \times 11 + 1$.

7. $-2x + 1$. **Nota:** $(x-1)^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$

8. Gráfico A

9.1. 2 minutos. **Nota:** São precisos 66 litros para encher o depósito ($71 - 5 = 66$). Passados 2 minutos este é o número de litros introduzido no depósito, $66 = 3t \Leftrightarrow t = \frac{66}{3} \Leftrightarrow t = 2$.

9.2. 33 é o número de litros de gasolina introduzido no depósito por minuto.

10. $x(x-1) + 2x = 6 - 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x = 6 - 4x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - x + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 5 \times (-6)}}{2 \times 5} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 11}{10} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + 11}{10} \vee x = \frac{-1 - 11}{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{10} \vee x = \frac{-12}{10} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{6}{5} \quad S = \left\{ -\frac{6}{5}; 1 \right\}$$

$$11. \begin{cases} \frac{x+y}{3} = 1 \\ 2x+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ 2x+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-y \\ 2(3-y) + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 6-2y+3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$(x, y) = (1, 2)$ é a solução do sistema

12.1. O ponto O pertence à mediatriz de [BC]

12.2. 100° . **Nota:** $\widehat{AC} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

12.3. $P_\odot = 2\pi r = \pi \times d = \pi \times \overline{AD} = \pi \times 7,52 \approx 23,6 \text{ cm}$. **Nota:** O triângulo [AED] é rectângulo em E porque o ângulo AED é um ângulo inscrito numa semicircunferência. O valor de \overline{AD} pode ser determinado pelo Teorema de Pitágoras.

$$\overline{AD}^2 = 6,8^2 + 3,2^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 56,48 \Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{56,48} \Leftrightarrow \overline{AD} \approx \pm 7,52, \text{ como se trata de um comprimento } \overline{AD} \approx 7,52.$$

13. A altura do cilindro (h) é igual a 2,125 metros.

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}} \Leftrightarrow V_{\text{sólido}} = A_b \times h + \frac{A_b \times h}{3} \Leftrightarrow 34 = 12 \times h + \frac{12 \times h}{3} \Leftrightarrow 102 = 36h + 12h \Leftrightarrow 48h = 102$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{102}{48} \Leftrightarrow h = 2,125 \text{ m}$$

14.1. As rectas DP e BC são concorrentes.

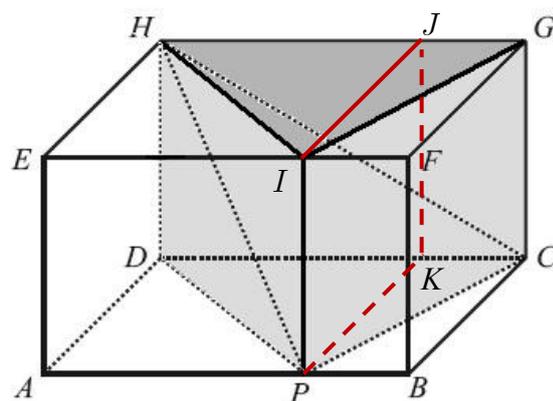
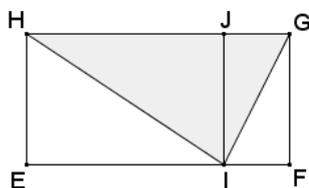
$$14.2. A_\Delta = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{DP} \times \overline{HD}}{2} = \frac{5 \times 3,124}{2} = 7,81 \approx 7,8 \text{ cm}^2.$$

Cálculo Auxiliar: $\tan 32^\circ = \frac{\overline{HD}}{5} \Leftrightarrow \overline{HD} = 5 \tan 32^\circ \Leftrightarrow \overline{HD} \approx 3,124 \text{ m}$.

14.3. 60 cm^3 . **Nota:** Decompõe o paralelepípedo em três prismas triangulares. A partir da pirâmide podes chegar à conclusão que o prisma com a mesma base mede 30 cm^3 (porque o volume deste prisma é o triplo do volume da pirâmide, uma vez que têm a mesma base e a mesma altura). Os outros dois prismas triangulares que sobram têm o mesmo volume do anterior, porque ambos têm a mesma altura e a soma das áreas duas bases é igual à base do prisma que consideramos anteriormente (se os juntares dá um prisma exactamente igual ao anterior).

$$V_{[DPCHIG]} = 3 \times V_{[HDPC]} = 3 \times 10 = 30 \text{ cm}^3$$

Como $V_{[PKCIJG]} = V_{[PBCIFG]}$ e $V_{[DPKHLJ]} = V_{[APDEIH]}$,



podemos concluir que $V_{[APDEIH]} + V_{[PBCIFG]} = V_{[DPCHIG]} = 30 \text{ cm}^3$.

$$\text{Logo } V_{[ABCDEFGH]} = V_{[DPCHIG]} + (V_{[APDEIH]} + V_{[PBCIFG]}) = 30 + 30 = 60 \text{ cm}^3$$

Repara que: $A_{\text{sombreada}} = A_{\text{branca}}$ e a altura dos prismas triangulares é a mesma.

$$A_{\text{sombreada}} = A_\Delta = \frac{b \times h}{2}; A_{\text{branca}} = A_\square - A_\Delta = b \times h - \frac{b \times h}{2} = \frac{b \times h}{2}$$

