SOLUÇÕES

1. Este termo tem 183 bolas pretas. Nota: o termo geral desta sucessão é $(n+1)^2$, logo o 13.º termo terá 196 bolas, $(13+1)^2 = 14^2 = 196$. Como cada termo tem um número de bolas brancas igual à ordem do termo, o 13.º termo irá ter 13 bolas brancas, logo as bolas pretas serão $196-13=183$.

2. (A). Nota: os termos desta sucessão vão ser potências de base 4. $\frac{1}{4}=4^{-1}$; $\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}=4^{-2}$; $\frac{1}{64}=\frac{1}{4^3}=4^{-3}$; …

3.1. $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC} = 180° - 60° = 120°$

3.2. $A_{\text{não sombreada}} = A_{\odot} - A_{\Delta} = 25\pi - 25\cos 30° \simeq 56{,}9$. Nota: $A_{\odot} = \pi \times 5^2 = 25\pi$. Usa a trigonometria para determinar os valores da base e da altura do triângulo. $\operatorname{sen} 30° = \frac{\overline{AC}}{10} \Leftrightarrow \overline{AC} = 10\operatorname{sen} 30° \Leftrightarrow \overline{AC} = 5$; $\cos 30° = \frac{\overline{BC}}{10}$ $\Leftrightarrow \overline{BC} = 10\cos 30°$, logo $A_{\Delta} = \frac{5\times 10\cos 30°}{2} = 25\cos 30°$.

4. (B). Nota: Considera $B(x,y)$, uma vez que a área do retângulo compreendido no 1.º quadrante (metade do retângulo $[ABCD]$) é 18; B pertence ao gráfico de f e f é uma função de proporcionalidade inversa, o produto de dois quaisquer valores correspondentes irá dar sempre 18, ou seja, $x\times y = 18 \Leftrightarrow y = \frac{18}{x}$.

5. (D);

6. $S = \left\{-\frac{1}{6}, 2\right\}$. Nota: a forma canónica desta equação é $6x^2 - 11x - 2 = 0$.

7. (D). Nota: $4\times 3\times 2\times 1 = 24$ ou usa um diagrama de árvore.

8.1. O Afonso percorreu 9750 metros. Nota: meia hora = 30 minutos logo, $D = 325\times 30 = 9750\, m$.

8.2. Ao fim de 48 minutos. Nota: a solução deste problema corresponde ao ponto de interseção das duas retas (funções afim), ou seja, será a solução do sistema $\begin{cases} D = 325t \\ D = 450t - 6000 \end{cases}$. Solução: $(t, D) = (48, 15600)$.

8.3. O treino dura 53 minutos e 20 segundos. Nota: $18\, km = 18000\, m$; $450t - 6000 = 18000 \Leftrightarrow t = \frac{160}{3} \Leftrightarrow t = 53,(3) \min$ e $0,(3)\min = \frac{1}{3}\min = 20$ segundos (ou usa uma regra de 3 simples).

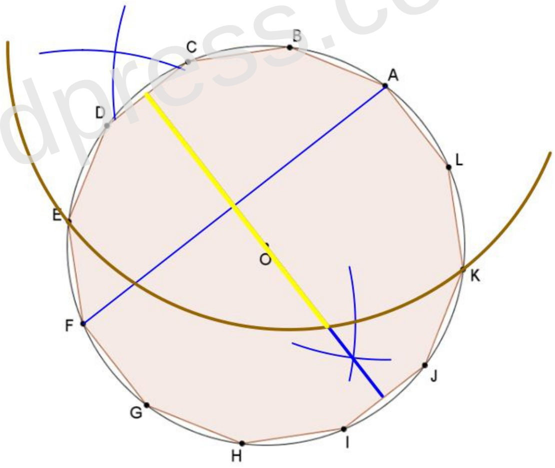
9.1. A área da região pintada de verde é, aproximadamente, $19{,}85$. Nota: $P_{\odot} = 24\pi \Leftrightarrow 2\pi r = 24\pi \Leftrightarrow r = \frac{24\pi}{2\pi}$ $\Leftrightarrow r = 12$; $A_{\odot} = \pi\times 12^2 = 144\pi$; $\frac{360°}{12} = 30°$; $\cos 15° = \frac{apótema}{12} \Leftrightarrow apótema \simeq 11{,}59$; $\operatorname{sen} 15° = \frac{\frac{l}{2}}{12} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 15° = \frac{l}{24}$ $\Leftrightarrow l = 24\operatorname{sen} 15° \Leftrightarrow l \simeq 6{,}22$; $A_{Dodecágono} = \frac{12\times 6{,}22}{2}\times 11{,}59 \simeq 432{,}54$. $A_{Verde} = A_{\odot} - A_{Dodecágono} = 144\pi - 432{,}54 \simeq 19{,}85$.

9.2. $\overline{BE} = \overline{EH} = \overline{HK} = \overline{KB}$, porque a arcos de circunferência iguais correspondem cordas iguais e a amplitude de cada arco correspondente a cada corda é $3 \times 30° = 90°$. Além disso, $\hat{B} = \hat{E} = \hat{H} = \hat{K} = \frac{6 \times 30°}{2} = 90°$.

9.3. Ponto H.

9.4. O conjunto de pontos está representado a amarelo na figura ao lado.

<u>Nota:</u> Os pontos que satisfazem as condições, são os que estão dentro do dodecágono, pertencem à mediatriz de $[AF]$ e estão dentro da circunferência de centro em B e raio igual a $\overline{AD}$.



10. $p(\textit{produto diferente zero}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

<u>Nota:</u> Usa uma tabela de dupla entrada.

×	−1	0	1
−1	1	0	−1
0	0	0	0
0	0	0	0
1	−1	0	1

11. $(x, y) = \left(5; \frac{13}{2}\right)$. <u>Nota:</u> a forma canónica deste sistema é $\begin{cases} 10x - 6y = 11 \\ -8x + 6y = -1 \end{cases}$.

12. $k = -3$. <u>Nota:</u> $256 = 2^8$ e $\frac{1}{2^{3k}} \times 2^{k+2} = 2^{-3k} \times 2^{k+2} = 2^{-3k+k+2} = 2^{-2k+2}$, ou seja, $-2k + 2 = 8 \Leftrightarrow -2k = 6 \Leftrightarrow k = -3$

13.1. 208 alunos não praticam futebol.

13.2. O número médio de horas de estudo semanal é 3,24.

13.3. $p(\textit{estudar até } 3h) = \frac{16}{25}$

14. (D)

15.1. $\overline{PF} = 2$. <u>Nota</u>: $V_{[MBCPFG]} = \frac{1}{5} \times (5 \times 5 \times 6) = 30$; $V_{[MBCPFG]} = 30 \Leftrightarrow A_{\triangle} \times h = 30 \Leftrightarrow \frac{\overline{PF} \times 5}{2} \times 6 = 30 \Leftrightarrow \overline{PF} = 2$.

15.2. Concorrente oblíqua.

15.3. $F\hat{P}G \simeq 59°$. <u>Nota</u>: $tan\left(F\hat{P}G\right) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow F\hat{P}G = tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow F\hat{P}G \simeq 59°$.

15.4. A área é 34,64. <u>Nota</u>: $cos\,30° = \frac{5}{\overline{PG}} \Leftrightarrow \overline{PG} = \frac{5}{cos\,30°}$. $A_{[CMPG]} = A_{\square} = \frac{5}{cos\,30°} \times 6 = \frac{30}{cos\,30°} \simeq 34,64$

16. (B). <u>Nota:</u> usa a FFT. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ *Verdadeiro*

17. (D)

18. (D). <u>Nota:</u> usa a FFT. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow k^2 + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - k^2 \Leftrightarrow cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - k^2}$, mas como α é um ângulo agudo, o $cos\alpha$ é positivo, logo $cos\,\alpha = \sqrt{1 - k^2}$.

19.1. $\overline{AB} \simeq 282,2\,m$. Nota: tendo em conta que $\overline{AC} = 245\,m$ e $\overline{BC} = 140\,m$, usa o Teorema de Pitágoras.

19.2. O maior cabo de aço faz um ângulo de, aproximadamente, 30º com o tabuleiro da ponte.

<u>Nota</u>: $tan\,\alpha = \frac{140}{245} \Leftrightarrow \alpha = tan^{-1}\left(\frac{140}{245}\right) \Leftrightarrow \alpha \simeq 30°$.

19.3. $A_{\triangle[CDE]} = 2783,2\,m^2$. Nota: $\frac{A_{final}}{A_{inicial}} = r^2 \Leftrightarrow \frac{A_{\triangle[CDE]}}{A_{\triangle[ABC]}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow A_{\triangle[CDE]} = \frac{4}{25} \times 17150 \Leftrightarrow A_{\triangle[CDE]} = 2744\,m^2$;

$A_{\triangle[ABC]} = \frac{245 \times 140}{2} = 17150\,m^2$.

20. $S = \left]\frac{9}{4}, +\infty\right[$. Nota: sem soluções reais $\rightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-p) < 0 \Leftrightarrow -4p < -9$

$\Leftrightarrow p > \frac{9}{4}$

21. (B). Nota: $\left(\frac{1}{a^3}\right)^{-200} \times a^{-800} = \left(a^{-3}\right)^{-200} \times a^{-800} = a^{600} \times a^{-800} = a^{-200} = \left(\frac{1}{a}\right)^{200} = \frac{1}{a^{200}}$

22. 2223 rifas. Nota: considera que x representa o número de rifas vendidas. Usando uma regra de 3 simples (ou multiplicando 1,50€ por 0,15) chega-se à conclusão que por cada rifa vendida são angariados 0,225€ (22,5 cêntimos) para o projeto. Pretende-se então que: $2500 + 0,225x > 3000 \Leftrightarrow 0,225x > 500 \Leftrightarrow x > \frac{500}{0,225} \Leftrightarrow x > 2222,(2)$, logo terão de vender, no mínimo, 2223 rifas para conseguirem atingir o objetivo.

23. Compraram-se 57 rosas. Nota: $x \rightarrow$ n.º de rosas; $y \rightarrow$ n.º de gerberas, um sistema que te permite resolver este problema é $\begin{cases} 1,20x + 0,30y = 88,80 \\ y = x + 11 \end{cases}$, sendo a solução o par ordenado $(x, y) = (57, 68)$.

24. A área do quadrado é igual a 61. Nota: começa por ilustrar a situação. Usando o Teorema de Pitágoras chegamos à conclusão que a diagonal do retângulo mede $\sqrt{61}$, logo $A_{\square} = \left(\sqrt{61}\right)^2 = 61$.

25. $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 6$. Nota: tendo em conta as dimensões da figura, relativamente ao triângulo, pode-se concluir que base $= \overline{HF} = 12 - x$; altura $= \overline{EC} = 8 - x$. Sendo assim pretende-se que $A_{Sombreado} = 42 \Leftrightarrow A_{\square} + A_{\triangle} = 42$

$\Leftrightarrow \frac{(12-x)(8-x)}{2} + x^2 = 42 \Leftrightarrow (...) \Leftrightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0 \Leftrightarrow (...) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 6$.

26. $\frac{\pi}{20}$ ou $\sqrt{0,03}$ (por exemplo).