SOLUÇÕES

1. $S=\left\{-\frac{1}{6};3\right\}$. Nota: a forma canónica desta equação é $6x^2-17x-3=0$.

2. $\begin{cases}53x+105y=844\\ y=\frac{x}{2}\end{cases}$

3.1. (B). Nota: $r_{redução}=\frac{2}{3}$; $\frac{A_{[BDE]}}{A_{[ABC]}}=r^2 \Leftrightarrow A_{[BDE]}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 A$.

3.2. $\overline{CE}=\frac{3}{2}\sqrt{39}-8$. Nota: desenha primeiro os dois triângulos separadamente e na mesma posição tendo em conta que os ângulos BED e CBA são ângulos de lados paralelos da mesma espécie, ou seja, são geometricamente iguais. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{EB}^2=\overline{DE}^2+\overline{BD}^2 \Leftrightarrow 64=\overline{DE}^2+25 \Leftrightarrow \overline{DE}^2=39 \Rightarrow \overline{DE}=\sqrt{39}$ (comprimento).
Como $\overline{CB}=\frac{3}{2}\overline{DE}$ então $\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=\frac{3}{2}\sqrt{39}-8$.

3.3. $\angle DEC \simeq 141°$. Nota: $sen\alpha=\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow sen\alpha=\frac{5}{8} \Leftrightarrow \alpha=sen^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \Leftrightarrow \alpha \simeq 38{,}7°$, logo $\angle DEC=180°-38{,}7° \simeq 141°$

4.1. $\angle HIF \simeq 34°$. Nota: $P_{\odot}=6\pi \Leftrightarrow 2\pi r=6\pi \Leftrightarrow r=3$; $\overline{FH}=\overline{AB}-\overline{AE}=10-6=4$; $\overline{FI}=\overline{BC}-\overline{BH}=12-6=6$;
$tg\alpha=\frac{\overline{FH}}{\overline{FI}} \Leftrightarrow tg\alpha=\frac{4}{6} \Leftrightarrow \alpha=tg^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)$.

4.2. O valor da área do triângulo $[FHI]$ é 9. Nota: pelo Teorema de Pitágoras temos $\overline{IH}^2=\overline{FH}^2+\overline{FI}^2 \Leftrightarrow 45=(2x)^2+x^2$. Conclui-se que $\overline{FH}=3$, como tal $A_{[FHI]}=\frac{\overline{FH}\times\overline{FI}}{2}=9$.

4.3. (B). Nota: $\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TQ}=\overrightarrow{SQ}$.

5.1. $C(1;-2)$. Nota: como C é um ponto do gráfico de f então $C(x,-2x^2)$, ou seja $\overline{AB}=x+x=2x$ e $\overline{BC}=2x^2$ (dado que se trata de um comprimento e como tal tem de ser positivo). Deste modo:
$P_{[ABCD]}=8 \Leftrightarrow 2\times\overline{AB}+2\times\overline{BC}=8 \Leftrightarrow 2\times 2x+2\times 2x^2=8 \Leftrightarrow 4x^2+4x-8=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$; dado que a abcissa de C é positiva podemos concluir que a ordenada vai ser $f(1)=-2\times 1^2=-2$, ou seja, $C(1;-2)$.

5.2. (B). Nota: analisando a Figura 4 conclui-se que a concavidade da parábola está voltada para baixo, logo não existe nenhum objeto cuja imagem por f seja um número positivo; $\left(-\frac{1}{a^2}\right)^3=\left(-a^{-2}\right)^3=-a^{-6}$ (é a única opção que não assume valores positivos).

6.1. O ponto O pertence à mediatriz de $\overline{CD}$ se $\overline{OD}=\overline{OC}$. Dado que o ponto D tem ordenada nula e pertence à função g tem de verificar a sua expressão algébrica, substituindo obtemos $0=-x+8 \Leftrightarrow x=8$, logo $\overline{OD}=8$. O ponto C tem coordenadas $(0,8)$, logo $\overline{OC}=8$. Como $\overline{OD}=\overline{OC}=8$ o ponto O pertence à mediatriz de $\overline{CD}$.

6.2. A área do triângulo $[ACE]$ é 32. Nota: O ponto C tem ordenada 8, ou seja, $C(0,8)$. Dado que o ponto A é um dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g então temos de resolver a equação $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}=-x+8 \Leftrightarrow x=-8 \vee x=4$. Como a abcissa do ponto A é negativa temos $A(-8,f(-8))$, ou seja, $A(-8,16)$. O ponto E tem coordenadas $(-8,8)$. Então $A_{[ACE]}=\overline{AE}\times\overline{CE}=\frac{8\times 8}{2}=32$.

6.3. (B). Nota: $(3x-2)^2-g(x)=9x^2-12x+4-(-x+8)=9x^2-11x-4$

7.1. $\angle BFA = 20°$. Nota: $\angle BOA = 60°$ logo $\overset{\frown}{BA} = 60°$; $\angle DOC = 180° - 100° - 60° = 20°$ logo $\overset{\frown}{DC} = 20°$; $\angle BFA = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{60° - 20°}{2} = 20°$ (ângulo excêntrico com o vértice no exterior da circunferência).

7.2. $\overline{AE} \simeq 7{,}52\,cm$. Nota: o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E, pois o ângulo DEA é um ângulo inscrito numa semicircunferência; $P_{[ABO]} = 12 \Leftrightarrow \overline{AO} = 4$ (raio) e como tal $\overline{AD} = 8$ (diâmetro da circunferência); $\overset{\frown}{DE} = 40°$ logo $\angle EAD = 20°$ (ângulo inscrito); $\cos 20° = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \cos 20° = \frac{\overline{AE}}{8} \Leftrightarrow \overline{AE} = 8\cos 20° \Leftrightarrow \overline{AE} \simeq 7{,}52\,cm$.

8. (C). Nota: $\frac{3^{3-k}}{27} = \frac{3^{3-k}}{3^3} = 3^{3-k-3} = 3^{-k} = \frac{1}{3^k}$.

9.1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Nota: a função f representada é uma função quadrática logo a sua expressão algébrica é do tipo $y = ax^2$, como o ponto $C(4,8)$ pertence ao gráfico da função f tem de verificar a sua expressão algébrica, substituindo obtemos $8 = a \times 4^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, ou seja, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

9.2. 32. Nota: a função g representada é do tipo $y = \frac{k}{x}$, como o ponto $C(4,8)$ pertence ao gráfico da função g temos que $k = 4 \times 8 \Leftrightarrow k = 32$, ou seja, $g(x) = \frac{32}{x}$. Como o ponto $B(x,y)$ pertence ao gráfico da função g podemos concluir que $A_{[ABO]} = \frac{x \times y}{2} = \frac{32}{2} = 16$, então $A_{[OBD]} = 2 \times A_{[ABO]} = 32$.

9.3. $-\sqrt{80}$. Nota: pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{OC}^2 = 4^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{OC} = \sqrt{80}$.

10. (B).

Caixa A

Caixa B: +	-1	-1	0	0	1
0	-1	-1	0	0	1
0	-1	-1	0	0	1
1	0	0	1	1	2
1	0	0	1	1	2

11. $\frac{3}{10}$. Nota: pode-se resolver recorrendo a uma tabela de dupla entrada. $p = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

12.1. Concorrentes não perpendiculares.

12.2. $\overline{AB} = 6\,dm$. Nota: $V_{sólido} = 540 \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} + V_{[BCIJKL]} = 540 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 \times \overline{BF} + \overline{BI} \times \overline{IJ} \times \overline{BK} = 540 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\overline{AB}^3 + 2\overline{AB}^2 \times \frac{\overline{AB}}{4} = 540 \Leftrightarrow \overline{AB}^3 = 216 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6\,dm$.

12.3. (C).

12.4. $\overline{BM} = \sqrt{324}\,dm$. Nota: $\overline{BM}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{IJ}^2 + \overline{MJ}^2 \Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 16^2 + 8^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BM} = \sqrt{324}$ (ou aplica o Teorema de Pitágoras duas vezes seguidas).

13. (C). Nota: $(2x-3)(2x+3) - (3-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 - (9 - 6x + x^2) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 18 = 0$

14.1. $C(6,9)$. Nota: as coordenadas do ponto C obtêm-se resolvendo o sistema $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 6 \\ y = -\frac{2}{3}x + 13 \end{cases}$.

14.2. $S = \left]-\infty; -3\right]$. Nota: $2 - \frac{3x-1}{4} \geq f(x) \Leftrightarrow 2 - \frac{3x-1}{4} \geq \frac{1}{2}x + 6 \Leftrightarrow x \leq -3$.

14.3. A área do trapézio $[OBDE]$ é 90. Nota: O ponto B tem ordenada 6, ou seja, $B(0,6)$. Dado que o ponto D tem ordenada nula e pertence à função g tem de verificar a sua expressão algébrica, substituindo obtemos $0 = -\frac{2}{3}x + 13 \Leftrightarrow x = \frac{39}{2}$, logo $\overline{OD} = \frac{39}{2}$. Dado que o ponto E é o ponto de interseção do gráfico da função g com a reta BE então a ordenada de E é 6. $g(x) = 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + 13 = 6 \Leftrightarrow x = \frac{21}{2}$. Então $A_{[OBDE]} = \frac{\overline{OD} + \overline{BE}}{2} \times \overline{OB} = 90$.

15.1. (A). Nota: desenha os dois triângulos separadamente. $\overline{AB}=10\,;\overline{BD}=2\,;\; r=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

15.2. $\frac{25}{2}\pi$. Nota: pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{DE}^2=\overline{DF}^2+\overline{EF}^2 \Leftrightarrow 5^2=x^2+x^2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}=x\,;\; A_{\odot}=\pi r^2=\frac{25}{2}\pi$.

16. (D). Nota: $\left(-\frac{1}{a}\right)^3\times a^5=\left(-a^{-1}\right)^3\times a^5=-a^{-3}\times a^5=-a^2$.

17.1. $54\pi\, dm^3$. Nota: $V_{cone}=36\pi \Leftrightarrow \frac{A_{base}\times altura}{3}=36\pi \Leftrightarrow A_{base}\times altura=108\pi$, ou seja, um cilindro com a mesma base e a mesma altura do cone tem $108\pi\, dm^3$ de volume. Como o cilindro que está em causa tem metade da altura do cone, o seu volume vai também ser metade do volume obtido anteriormente, ou seja,
$V_{cilindro}=A_{base}\times\frac{altura}{2}==\frac{A_{base}\times altura}{2}=\frac{108\pi}{2}=54\pi\, dm^3$.

17.2. $A_{lateral}=138{,}1\,dm^2$. Nota: $A_{\odot}=16\pi \Leftrightarrow \overline{CF}=4$. Como triângulo $[CEF]$ é retângulo em F, então $tg70^\circ=\frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4tg70^\circ=\overline{EF}$, logo $\overline{BC}=2tg70^\circ$. $A_{lateral}=P_{\odot}\times\overline{BC}=8\pi\times 2tg70^\circ\simeq 138{,}1\,dm^2$.